«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Отчет по расчетно-графической работе

По математическому анализу № 1

Команда 6

Выполнили: Хабнер Георгий P3131,

Билошицкий Михаил P3116,

Кобик Никита P3124,

Пархоменко Кирилл P3112,

Шикунов Максим P3133

Преподаватель: Константин Правдин

Ментор: Анастасия Кузьмина

Место выполнения: дистанционно

Дата: 31.10.22

г. Санкт-Петербург, 2022г.

**Задание 1. Метод математической индукции.**

Пользуясь методом математической индукции, докажите, что при любом n ∈ N утверждение верно:

Проверим утверждение для n = 1, n = 2, n = 3.

При n = 1:

При n = 2:

При n = 3:

Предположив, что утверждение верно, проверим справедливость утверждения для n + 1 элемента:

Основываясь на предположении, что утверждение верно, можем сделать замену в левой части уравнения. Тогда получим:

Теперь нам остается преобразовать левую часть уравнения так, чтобы она была равна правой.

Таким образом, утверждение верно при любом n ∈ N элементе.

**Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности.**

Вещественная последовательность задана рекуррентно: , где . Исследуйте

её предел при в зависимости от значения .

1. Предположите, что предел существует, и найдите его. Доказательство существования

предела будет проведено в п. 6):

Предположим, что существует предел: .

Пусть предел , где и, следовательно, , тогда

Получаем, что (не удовлетворяет условию ).

1. Какими могут быть значения ? Укажите множество возможных значений . Докажите ваш ответ аналитически:

Из получаем, что => , тогда это означает, что может принимать значения

1. При каком значении последовательность является стационарной? Докажите это

аналитически:

***Стационарная последовательность*** *— это последовательность, все члены которой, начиная с некоторого, равны.*

Пусть и и , тогда ;

Из уравнения получаем, что **a = 2** и a = -1 (ну удовлетворяет условию), тогда последовательность является стационарной при .

1. Познакомьтесь с теоремой Вейерштрасса об ограниченной монотонной

последовательности и запишите её формулировку:

Теорема Вейерштрасса об ограниченной монотонной последовательности:

*Для того чтобы возрастающая (убывающая) последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху (снизу).*

1. Выделите характерные случаи для значений (с точки зрения монотонности) и

проиллюстрируйте их графиками последовательности:

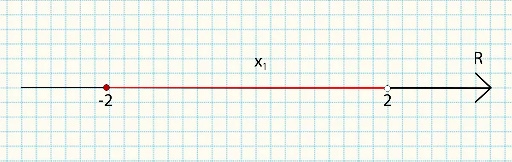
Рассмотрим три случая:

1. Когда последовательность возрастает и ограничена сверху:

⬄

⬄

Из системы неравенств получаем, что => .

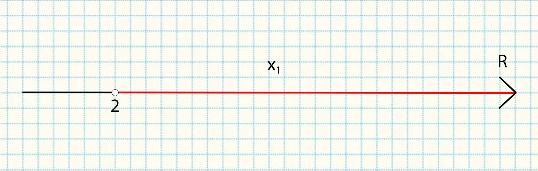


1. Когда последовательность убывает и ограничена снизу:

⬄

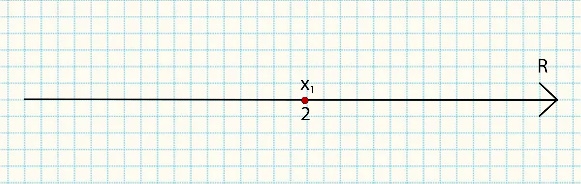
⬄

Из системы неравенств получаем, что => .



1. Когда последовательность монотонна:

Из системы получаем, что => .



1. Докажите аналитически ограниченность и монотонность последовательности для каждого

характерного случая. Сделайте заключение о существовании предела по теореме

Вейерштрасса:

По теореме Вейерштрасса предел последовательности = 2, так как:

1. При ∈ [−2; 2), последовательность строго возрастает и ограничена сверху. Возьмём = −2 и предположим, что < 2, тогда ;

=> всегда будет меньше 2.

Так как , то .

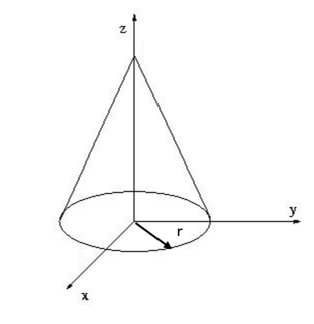
1. При ∈ (2; +∞), последовательность строго убывает и ограничена снизу. Возьмём = 10 и предположим, что > 2, тогда ;

=> всегда будет больше 2.

Так как всегда будет больше 2, тогда < .

**Задание 3. Сравнение бесконечно малых.**

1. Геометрическая иллюстрация к задаче



1. Обозначения и формулы

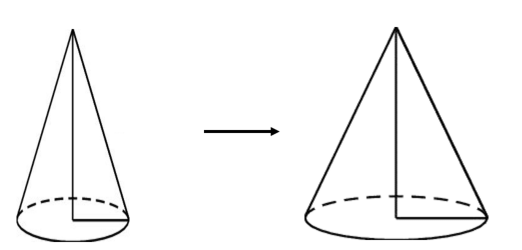
* h = const
* r – радиус конуса
* – бесконечно-малое приращение радиуса
* V = - объем конуса
* – бесконечно-малое приращение объема

1. Решение задачи аналитически

Бесконечно-малое приращение объема конуса большего порядка малости,

чем бесконечно-малое приращение радиуса и имеет 2 порядок малости.

1. Геометрическая иллюстрация решения



**Задание 4.** **Прикладные задачи**

План:

1) Сделайте геометрическую иллюстрацию к задаче.

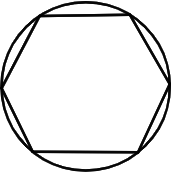
2) Составьте математическую модель: введите обозначения, составьте формулу.

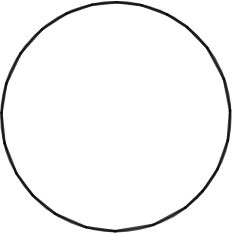
3) Решите задачу аналитически.

4) Запишите ответ и проиллюстрируйте его геометрически.

Вычислите длину окружности как предел периметра вписанного многоугольника, полученного удвоением числа сторон вписанного правильного шестиугольника.

Геометрическая иллюстрация к задаче:

 Изображение выглядит как наушники, ожерелье, хлыст

Автоматически созданное описание 

Вписанный 6-тиугольник, Вписанный 12-тиугольник, Вписанный 24-ехугольник и так далее…

Решение:

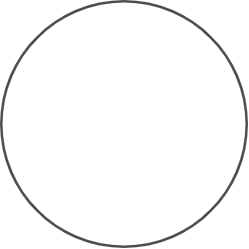
Сторона вписанного правильного многоугольника вычисляется по формуле (n – число сторон многоугольника)

Тогда периметр многоугольника равен

Предел периметра вписанного многоугольника, полученного удвоением сторон вписанного правильного 6-ти угольника будет выглядеть так:

(, тогда ) =

= =

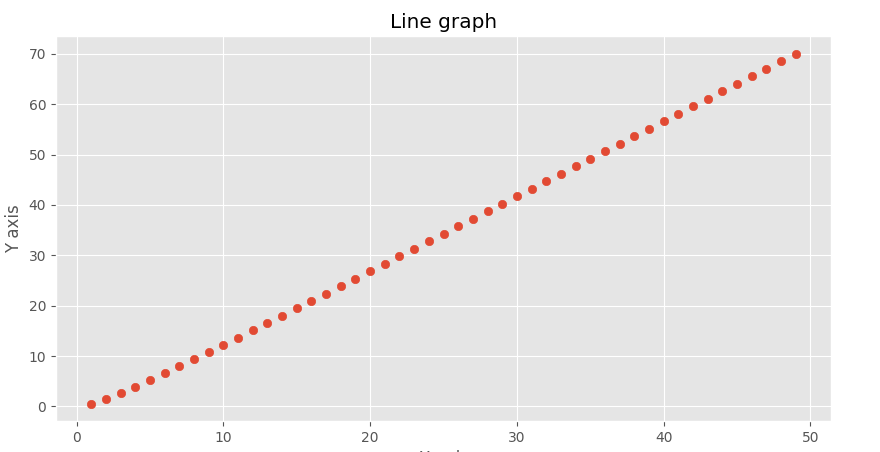
Ответ: 

**Задание 5. Исследование сходимости**

**Анализ последовательности**

**Пункт 1.** Вычислить предел последовательности при

**Пункт 2.** Построить график общего члена последовательности в зависимости от номера n

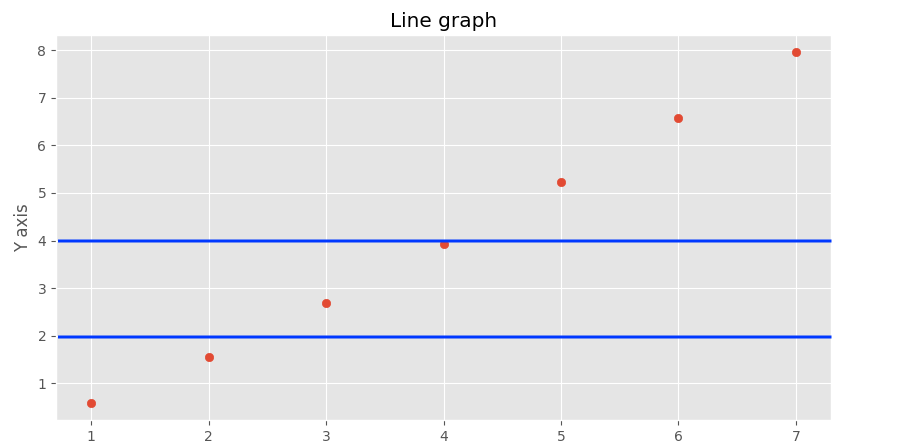


**Пункт 3.** Проиллюстрировать сходимость (расходимость) последовательности

Пусть

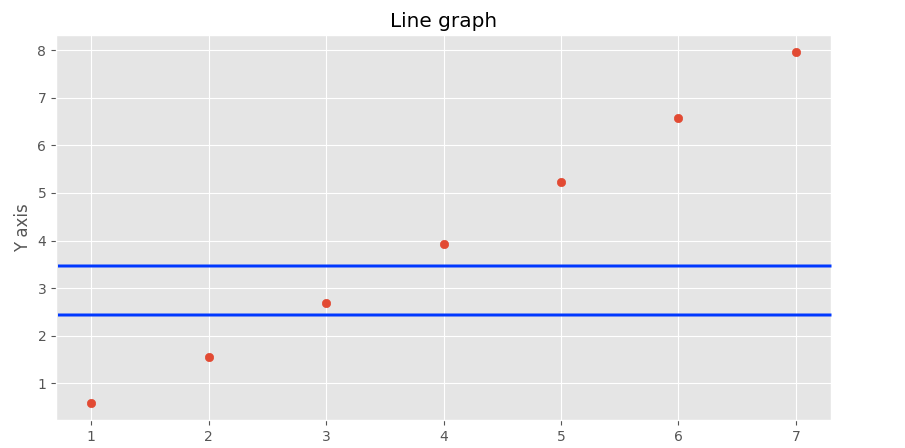
Для точки

; N() = 3



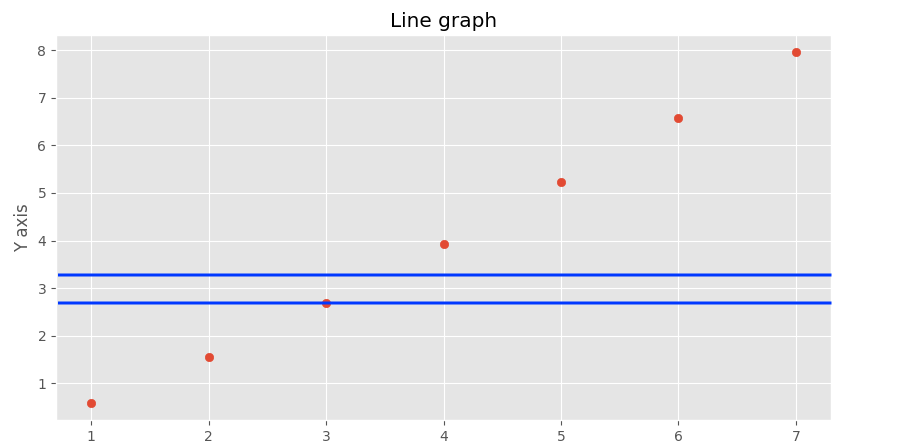
Для точки

; N() = 3



Для точки

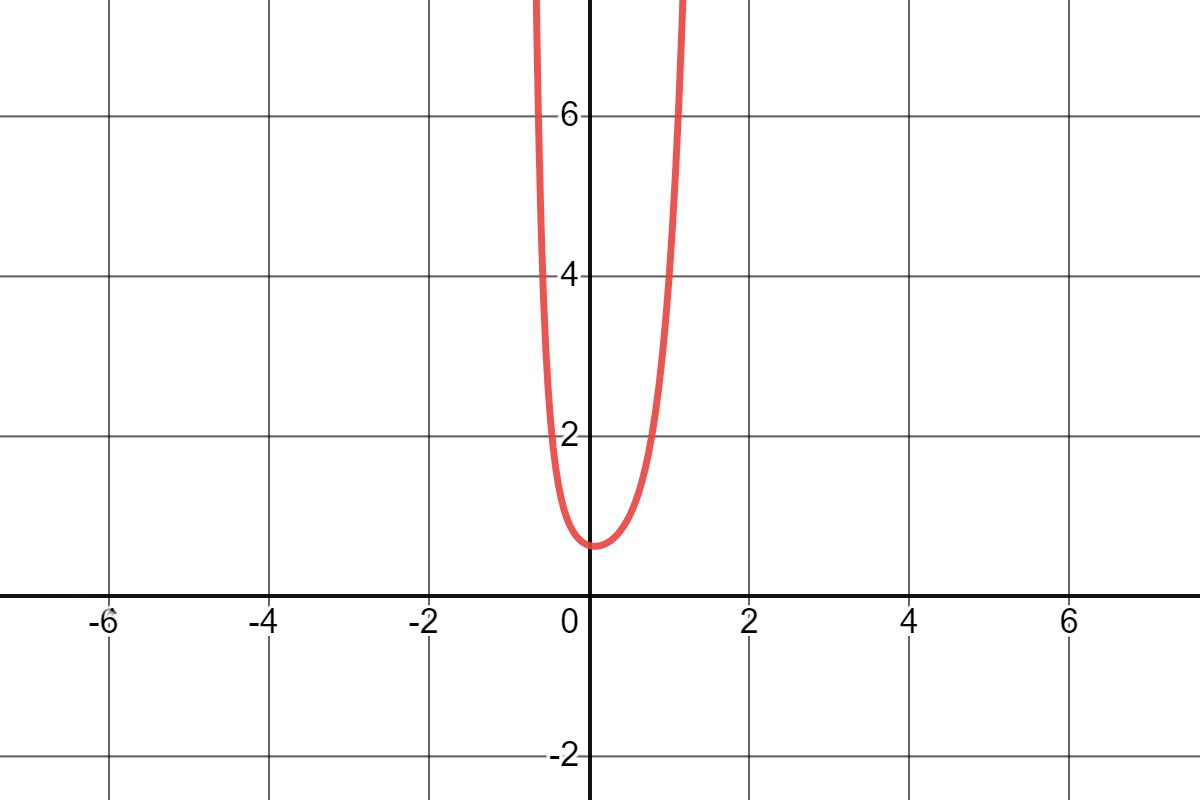
; Не существует такого номера, что все номера после него входят в окрестность



**Анализ функции**

**Пункт 1.** Вычислить предел функции при

**Пункт 2.** Построить график функции в зависимости от x

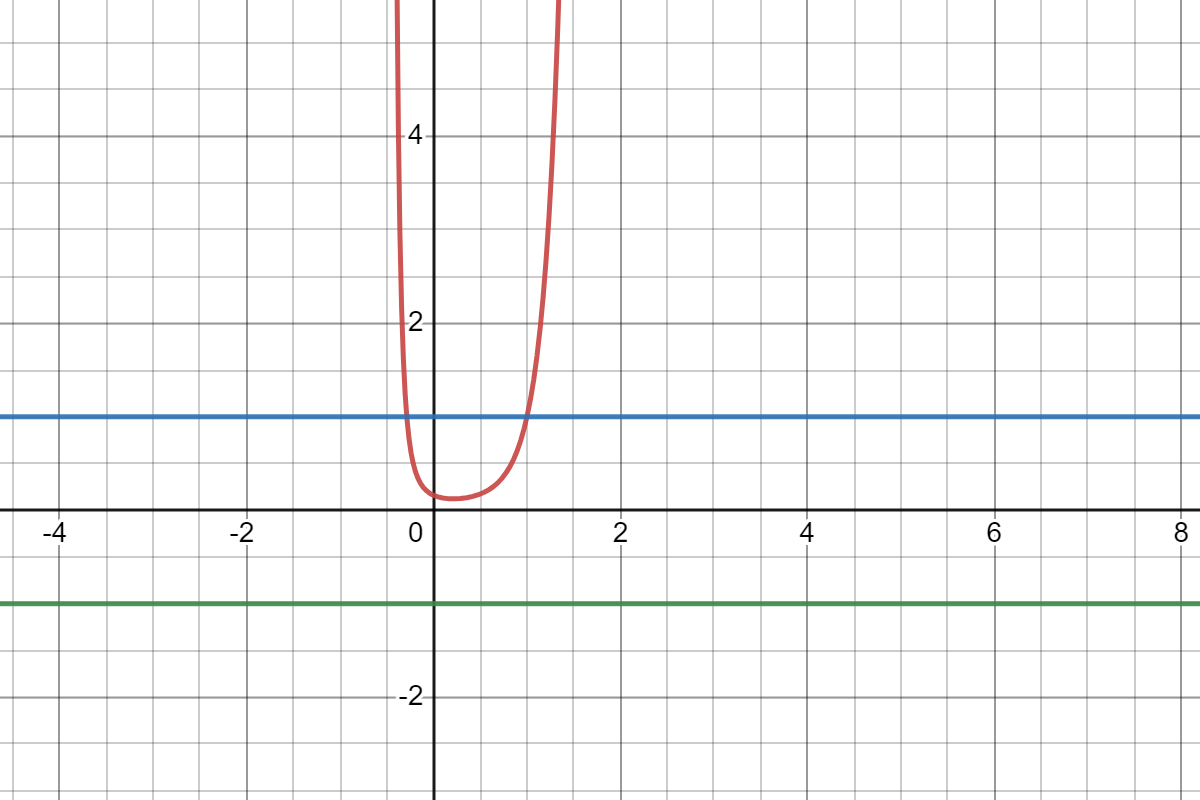


**Пункт 3.** Проиллюстрировать сходимость (расходимость) функции

Пусть

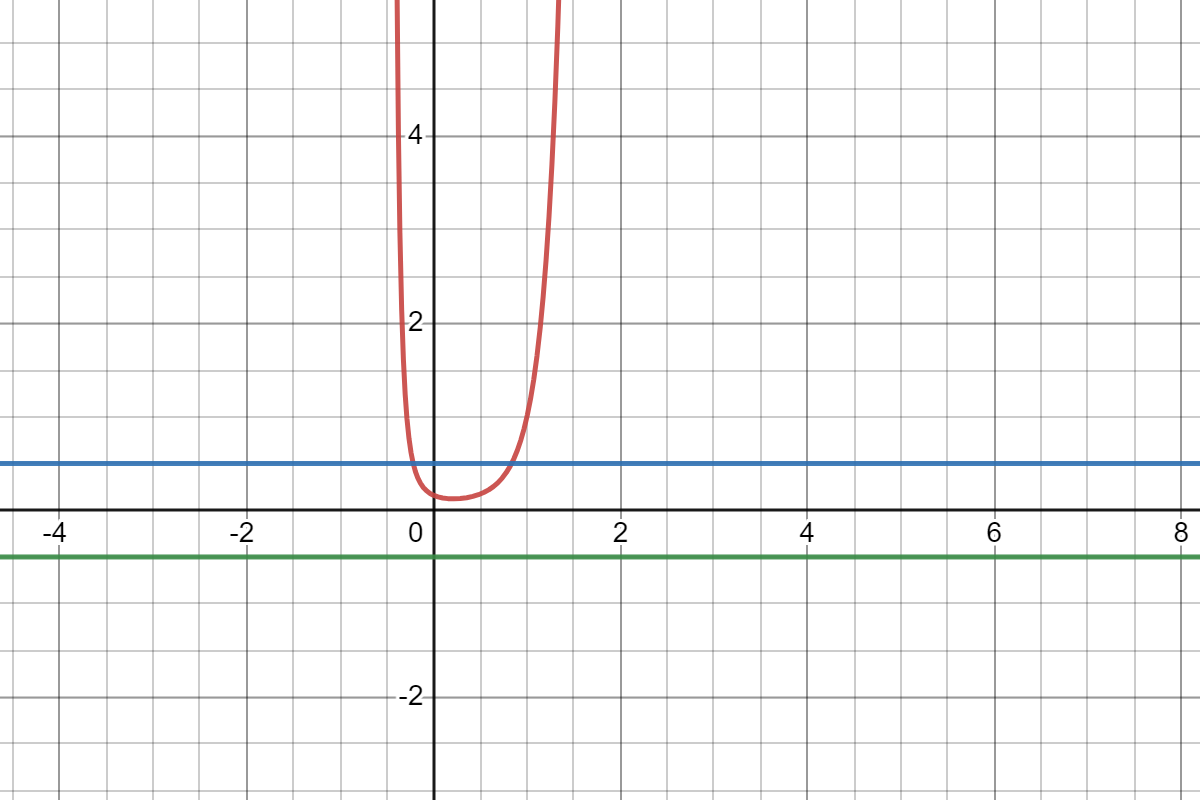
Для точки

; x ∈ (-0.29;1)



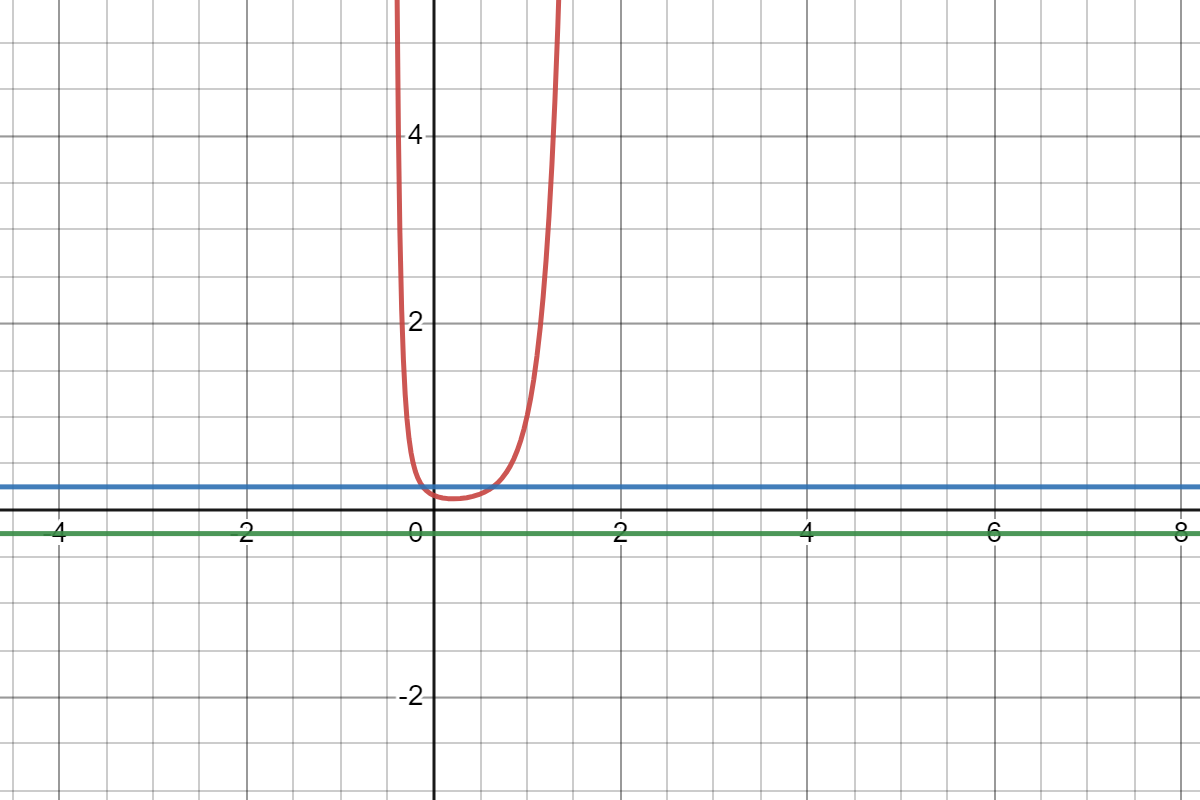
Для точки

; x ∈ (-0.22;0.84)



Для точки

; x ∈ (-0.11;0.64)



Оценочный лист

Каждый из участников команды вложил равный вклад в выполнение работы.